ＫＭＡＰによる微分方程式の解法(3)－特殊関数
②＜ベッセルの微分方程式＞

(A) H27(2015).5.25 片柳亮二

微分方程式の初期値問題をＫＭＡＰで解く方法について述べる．

[例題 3.2] ベッセルの微分方程式
ケプラーの惑星の運動において現れるベッセルの微分方程式について，ここでは時間に対する微分方程式と考え，初期値問題として解の時間応答を求めよ．

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{t}\dot{x}(t) - \left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)x(t),\qquad \text{初期値 } x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1$$

なお，$\nu=1$ とする．

まず，$\dot{x}$ の初期値について検証しておく．

ベッセルの微分方程式の解は通常次のように標記される．

$$x(t) = J_\nu(t)$$

この $J_\nu(t)$ は，ν 次の第一種ベッセル関数とよばれ，次の漸化式がある．

$$t\frac{dJ_\nu(t)}{dt} + \nu J_\nu(t) = t J_{\nu-1}(t)$$

いま，$\nu=1$ に対しては次のようである．

$$t\frac{dJ_1(t)}{dt} + \nu J_1(t) = t J_0(t)$$

ここで，$t=0$ においては，$J_1(0)=x(0)=0$ であるから，

$$\left(\frac{dJ_1(t)}{dt}\right)_{t=0} = J_0(0)$$

となる．ここで，この式の右辺の値は 0 であるので，初期値に関しては $x(t)$ で表すと次のように表される．

$$\dot{x}(0)=1$$

さて，ベッセルの微分方程式の応答を求めよう．いま，次のようにおく．

$$x_2 = \dot{x}$$

このとき，ベッセルの次の 1 階の微分方程式に変形できる．

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{t}x_2 - \left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)x \end{cases}$$

行列表示すると次のようである.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right) & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix},$$

初期値 $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$

この状態方程式をＫＭＡＰで解くために，次の行列のインプットデータを準備する.

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right) & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix}, \qquad B_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(この行列の 0 以外の要素にデータを設定する)(下記インプットデータ参照)
(このインプットデータの作り方については下記資料を参照ください)
http://katayanagi.g.dgdg.jp/Introduction%20of%20KMAP%20State%20Equation,Y150524.pdf

この微分方程式を初期値を考慮して，ＫＭＡＰにより直接解いてみよう.ベッセルの微分方程式の行列表示式の応答を求めようとすると，t=0 で 0 割が生じて計算不能になる．そこで，時間をわずかに(Δt=0.001 秒)ずらして計算を行う.

```
EIGE.微分方程式(3.2).Y150513.DAT
NXP               = 2
tmax(s)           =       10.000
1.NU1------> 2
  T , U1              0.000         0.000
                     60.000         0.000
3.NU3------> 2
  T , U3              0.000         0.000
                     60.000         0.000
5.NU5------> 2
  T , U5              0.000         0.000
                     60.000         0.000
********10********20********30********40********50********60********70******
<積分数, IRIG, TDEBUG 時間, 補間関数>  3  0    0.0  0
      <Control System Data>          Hi *---GAIN----NCAL*NO1*NO2*NO3*NGO*LNO
  1  //
  2  H1=E68; (time)                  H 0               13   1  68   0   0   0
  3  H2=G;                           H 0  0.1000E-02  11   2   0   0   0   0
  4  H3=H1+H2; (t+Δt)               H 0               21   3   1   2   0   0
  5  H12=G;                          H 0  0.1000E+01  11  12   0   0   0   0
  6  H4=H3*H3;                       H 0               23   4   3   3   0   0
```

```
H6=G/H4;                      H 0  0.1000E+01  25   6   4   0   0   0
H7=H12-H6;                    H 0              22   7  12   6   0   0
H21=H7*G;                     H 0 -0.1000E+01  17  21   7   0   0   0
H22=G/H3;                     H 0 -0.1000E+01  25  22   3   0   0   0
AP(I1,J2)H12;                 H 0             621   1   2  12   0   0
AP(I2,J1)H21;                 H 0             621   2   1  21   0   0
AP(I2,J2)H22;                 H 0             621   2   2  22   0   0
//
//------------------------
//安定解析出力に追加する場合
//ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ用出力(Z191～Z200)
//(このﾃﾞｰﾀが TES6.DAT に入る)
Z191=Z6*G;                    H 0  0.1000E+01  53 191   6   0   0   0
Z192=U1*G;                    H 0  0.1000E+01  52 192   1   0   0   0
//(最後に次の END 文が必要)
//
{Pitch Data END};             H 0             899 888 887 886   0   0
//*-----------------------------
//*(注 1)状態方程式使用の場合
//* Z1,Z3,Z5       : 制御入力設定済
//* Z6～(NXP 個) : 状態変数設定済
//* Ri は安定解析の出力で下記注意
//* R6～(NXP 個) : 状態変数に対応
//* R(6+NXP)～Rn: 出力変数の追加
//* 解析出力ｷｰｲﾝは i=4～(R 設定数)
//*
//*(注 2)状態方程式使用しない場合
//* Zi は全て通常の Z 変数
//* R6～出力変数を設定
//* 解析出力ｷｰｲﾝは i=4～(R 設定数)
//$----------------------------
---------(縦系ゲイン最適化－探索範囲)--------------------------------------
探索ゲイン数= 0
 重み係数=  0.0000E+00   影響範囲(rad/s)=  0.0000E+00
 *****(ゲイン最適化－重み関数 W(s))*****
極の数= 0
零点数= 0
ゲイン=  0.0000E+00 ------------------------------------------------------
         初期値  X( 1)=   0.0000E+00
                 X( 2)=   0.1000E+01
{Control Data END};           H 0             999   0   0   0   0   0
----------------------------(DATA END)-------------------------------------
```

■結果表示９：安定解析結果

```
***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.1618D+04
 N         REAL                 IMAG
 1    -0.16180334D+04      0.00000000D+00
 2     0.61803350D+03      0.00000000D+00
ZEROS( 0), II/JJ= 4/ 1,  G= 0.0000D+00
 N         REAL                 IMAG
```

■結果表示７：シミュレーション図

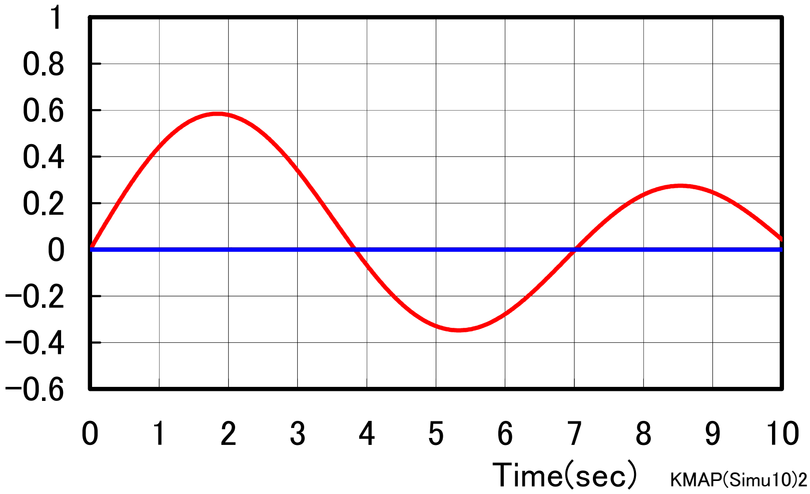

図 3.2(a)　ベッセルの微分方程式の時間応答(ν=1)
(KMAP(Simu10)2.xls のスケールを修正して表示)

以上